На правах рукописи

УДК 517.54

Низамиева Лилия Юнисовна

Внутренние и внешние смешанные обратные краевые задачи по параметру x

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Насыров Семен Рафаилович
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор Расулов Кахриман Мирземагомедович
	доктор физико-математических наук, доцент Шабалин Павел Леонидович
Ведущая организация	ГОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»

Защита состоится «26» мая 2011 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: г. Казань, ул. Профессора Нужина, д. 1/37, Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, ауд. 337 (324).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан «26» апреля 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Работа посвящена исследованию внутренних и внешних смешанных обратных краевых задач по параметру x.

Под обратными краевыми задачами понимаются задачи отыскания контура по заданным на нем значениям функции и функции, аналитической внутри этого контура. Обратные краевые задачи – научное направление, получившее широкое применение в задачах механики сплошных сред и физики. К настоящему времени оно довольно хорошо разработано и находит приложение в таких областях как аэродинамика, гидродинамика, теория фильтрации, теория взрыва, электрохимическая размерная обработка металлов.

Развитие теории обратных краевых задач началось с работы Г. Г. Тумашева[1], где дано точное и эффективное решение некоторых задач гидромеханики. М.Т. Нужин[2] дал общую постановку обратной краевой задачи и сформулировал ее впервые как математическую задачу для аналитических функций. С тех пор теория обратных краевых задач стала активно развиваться. Обратным краевым задачам посвящено большое количество работ казанских математиков и механиков.

Одной из основных обратных краевых задач для аналитических функций является внешняя обратная краевая задача по параметру s в постановке Ф. Д. Гахова. Решение задачи осуществляется следующим образом: сначала восстанавливается аналитическая функция $\chi(\omega) = \ln dz/d\omega$ в области D_ω ограниченной кривой L_ω с уравнением $\omega = \omega(s)$, а затем определяется функция $z(\omega)$, обратная к искомой. Ф. Д. Гахов вывел уравнение для определения полюса функции $z(\omega)$ и доказал его разрешимость. В дальнейшем оно изучалось многими авторами (Л. А. Аксентьев, М. И. Киндер, А. В. Киселев, С. Н. Кудряшов, С. Р. Насыров, В. С. Рогожин, С. Б. Сагитова, П. Л. Шабалин и др.), которые изучали вопросы единственности решения этого уравнения, структуру множества его корней и пр.

Обобщением обратных краевых задач являются смешанные обратные краевые задачи, которые состоят в определении области D_z с частично известной границей и аналитической в ней функции $w = w(z)$, которая конформно отображает

[1]Тумашев, Г. Г. Определение формы границ потока жидкости по заданному закону распределения скорости или давления / Г. Г. Тумашев // Уч. зап. КГУ им. В.И. Ульянова-Ленина. – Казань. – 1952. – Т. 112. – кн. 3. – С. 3-24.

[2]Нужин, М. Т. О некоторых обратных краевых задачах и их применении: к определению формы сечения скручиваемых стержней / М. Т. Нужин // Уч. зап. Казан.-ун-т. – Казань. – № 109. – кн. 1. – 1949.

D_z на жорданову область D_w по некоторым краевым условиям. Исследованием смешанных обратных краевых задач по различным параметрам занимались занимались Б. Демченко, Г. Г. Тумашев, М. Т. Нужин, В. Н. Монахов, М. И. Хайкин, Н. Б. Салимов, А. М. Елизаров и др.

Впервые смешанную обратную краевую задачу по параметру x поставил и исследовал В. Н. Монахов[3]. Смешанная обратная краевая задача по параметру x исследовалась также в работах Р. Б. Салимова, Е. В. Стрежневой, С. Р. Тлюстен, Е. В. Губкиной, И. Б. Давыдкина, С.Р. Насыровым и др.

Целью данной работы является вывод дифференциальных уравнений для определения акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца, разработка приближенного метода решения внутренних смешанных обратных краевых задач по параметру x методом движущегося разреза, а также получение аналога уравнения Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности, содержащей точку ветвления произвольного порядка, расположенную над бесконечно удаленной точкой, и доказательство его разрешимости.

Научная новизна работы состоит в следующем.

Получен новый приближенный метод нахождения акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца.

Получен новый приближенный метод нахождения акцессорных параметров в интегральном представлении решения для смешанной обратной краевой задачи по параметру x с полигональной известной частью границы.

Построен аналог уравнения Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности, содержащей точку ветвления произвольного порядка, расположенную над бесконечно удаленной точкой, и доказана его разрешимость.

Результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут найти применение при исследовании обратных краевых задач со свободной границей механики сплошных сред.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Уфимской международной математической конференция, посвященной памяти А.Ф. Леонтьева (2007); на XIV Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функции и их приложения», посвященной памяти академика П.Л. Ульянова

[3]Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений / В. Н. Монахов. – Новосибирск, 1977. – 424 с.

(2008); на IV Петрозаводской конференции по комплексному анализу (2008); на семинаре по геометрической теории функций в Казанском университете (руководитель — профессор Л. А. Аксентьев); на семинаре отдела математического анализа НИИММ им. Н. Г. Чеботарева Казанского университета (руководитель — профессор Ф. Г. Авхадиев); Девятой международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы»(2009); на итоговой научной конференции Казанского университета (2010, 2011), на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (2011).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в десяти работах, из них одна – из списка, рекомендованного ВАК РФ. В совместных публикациях [1], [3], [4], [5], [6], [10] научному руководителю принадлежат постановка задач и предложенные методы исследований, доказательства – автору.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, семи параграфов, объединенных в три главы, и списка литературы, содержащего 111 названий. Работа изложена на 102 страницах машинописного текста и содержит 23 рисунков.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан краткий обзор литературы по исследуемой теме, изложено содержание работы, приведен список результатов, выносимых на защиту.

В первой главе получена система дифференциальных уравнений для нахождения акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца. Проблема определения констант (акцессорных параметров) в интеграле Кристоффеля – Шварца была поставлена работах Э. Кристоффеля и Г. Шварца. Существуют различные методы определения этих констант, предложенные М. А. Лаврентьевым, А. Вайнштейном, С. Бергманом, Н. П. Стениным, Л. В. Канторичем, И. С. Хара, В. Коппенфельсом, Ф. Штальманом, П. Ф. Фильчаковым, П. П. Куфаревым, Т. А. Дрисколом и другими.

В § 1.1. приводятся необходимые для последующего изложения материала определения конца и простого конца односвязной области, семейства областей, а также некоторые сведения из теории простых концов для последовательности областей.

В § 1.2. выводится система дифференциальных уравнений для определения акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца.

Для нахождения этих параметров мы предлагаем подход, идейно близкий к методу П.П. Куфарева[4]. В основе нашего подхода лежит использование краевых задач Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами и вариаций их решений.

Функция, осуществляющая конформное отображение верхней полуплоскости на n-угольник, внутренние углы которого равны $\alpha_1\pi,\ \alpha_2\pi,\ \dots,\alpha_n\pi$, представляется в виде интеграла Кристоффеля – Шварца

$$z(\zeta) = C\int\limits_{s_1}^{\zeta}\prod_{k=1}^{n}(t-s_k)^{\alpha_k-1}dt + C_1.$$

Вещественные числа $s_1,\ s_2,\ \dots,s_n$, являются координатами точек вещественной оси, соответствующих вершинам P_1, P_2, ..., P_n n-угольника.

Рассматривается вспомогательная задача нахождения семейства конформных отображений верхней полуплоскости на плоскость с разрезом по ломаной, состоящей из луча и части границы заданного многоугольника $P_1P_2\dots P_n$. Применяя в случае необходимости преобразование поворота, можем считать, что луч идет по вещественной оси. Конец разреза движется по контуру многоугольника от первой вершины P_1 до последней P_n, луч имеет вершиной точку P_1 и направлен в сторону вершины P_n. Предполагается, что сторона P_1P_n выбрана таким образом, что луч пересекает границу многоугольника только по этой стороне (рис. 1).

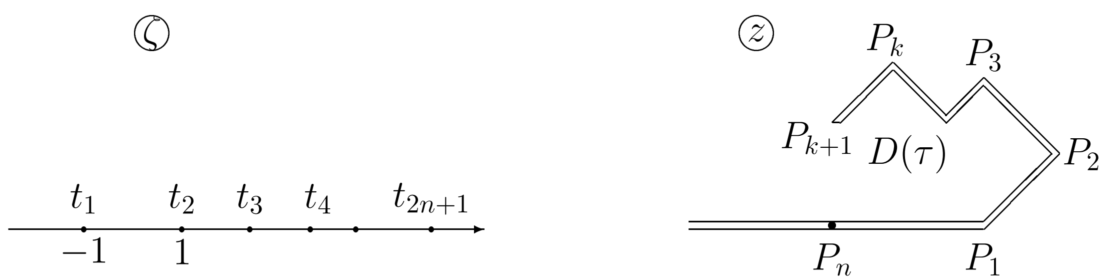

Рис. 1

Сначала отобразим верхнюю полуплоскость на плоскость с разрезом по лучу от ∞ до P_1. Затем рассмотрим конформные отображения верхней полуплоскости на плоскость с разрезом вдоль луча от ∞ до P_1 и части отрезка $[P_1,\ P_2]$. Конец разреза движется от P_1 к P_2. Зададим соответствие трех точек: $t_1=-1$ переходит в P_1, $t_2=1$ в P_2, ∞ в ∞. Далее из точки P_2 выпускаем разрез в направлении

[4]См., например, Александров, И. А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций / И. А. Александров. – М.: Наука, 1976. – 344 с.

точки P_3 и удлиняем его, пока не дойдем до точки P_3 и т. д. до тех пор, пока ломаная не обойдет границу многоугольника, за исключением стороны P_nP_1.

Функция $z(\zeta)$, отображающая верхнюю полуплоскость на плоскость с разрезом по ломаной в случае, когда конец разреза лежит на k-ом звене ломаной $(k=\overline{1,n})$, представима в виде интеграла Кристоффеля – Шварца:

$$z(\zeta)=C\int_{t_1}^{\zeta}(\omega-t_{k+1})\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{\omega-t_j}{\omega-t_{2k+2-j}}\right)^{\alpha_j-1}d\omega+z_1, \tag{1}$$

где $\alpha_j\pi$ — внутренние углы многоугольника, z_1 – аффикс точки P_1. Можно считать, что значения параметров t_1 и t_2 фиксированы и равны (-1) и 1 соответственно.

Вариация δz отображающей функции (1) в случае, когда конец разреза лежит на k-й стороне ломаной, может быть найдена как решение вполне определенной краевой задачи Гильберта. Используя (1) и равенство $\delta\frac{dz}{d\zeta}=\frac{d(\delta z)}{d\zeta}$, получаем систему дифференциальных уравнений для нахождения параметров t_j и C.

Теорема 1. *Акцессорные параметры в интеграле Кристоффеля – Шварца* (1) *удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\frac{dt_j}{d\tau}=\frac{t_j^2-1}{t_j-t_{k+1}},\qquad 3\le j\le 2k+1,\ j\ne k+1,$$

$$\frac{dt_{k+1}}{d\tau}=\alpha_1(t_{k+1}-1)+\alpha_2(t_{k+1}+1)+(t_{k+1}^2-1)\times$$

$$\times\sum_{j=3}^{k}\frac{\alpha_j-1}{t_{k+1}-t_j}-(t_{k+1}^2-1)\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j-1}{t_{k+1}-t_{2k+2-j}},$$

$$\frac{1}{C}\frac{dC}{d\tau}=-\frac{2\alpha_1}{1+t_{k+1}}+\frac{1}{(1+t_{k+1})}\frac{dt_{k+1}}{d\tau}-\sum_{j=3}^{k}\frac{1-\alpha_j}{1+t_j}\frac{dt_j}{d\tau}+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\frac{1-\alpha_j}{1+t_{2k+2-j}}\frac{dt_{2k+2-j}}{d\tau}.$$

Когда конец разреза доходит до вершины P_{k+1}, осуществляется переход к новой системе, соответствующей случаю, когда конец разреза движется по $(k+1)$-й стороне. При этом в качестве начальных условий для новых параметров t_j используются значения, которые соответствуют финальному значению параметров, полученных на k-м этапе. Их количество увеличивается на 2. Когда на

$(n-1)$-м этапе конец разреза стремится к вершине P_n, значения параметров $t_j,\ 3 \le j \le n$ стремятся к искомым акцессорным параметрам s_j.

В § 1.3 рассмотрены примеры определения акцессорных параметров для следующих случаев:

1) конформного отображения верхней полуплоскости на шестиугольник с вершинами в точках: $1,\ 2,\ 3+i,\ 2+2i,\ 1+2i,\ i$ и углами $\alpha_1\pi = \alpha_3\pi = \alpha_4\pi = \alpha_6\pi = 3\pi/4$, $\alpha_2\pi = \alpha_5\pi = \pi/2$;

2) конформного отображения верхней полуплоскости на шестиугольник с вершинами в точках: $0,\ 1,\ 3+i,\ 2+2i,\ 1+2i,\ i$ и углами $\alpha_1\pi = \pi/4 + \arccos 1/\sqrt{5}$, $\alpha_2\pi = \pi/2 + \arccos 2/\sqrt{5}$, $\alpha_3\pi = \alpha_4\pi = \alpha_5\pi = 3\pi/4$, $\alpha_6\pi = \pi/2$.

В главе 2 рассмотрен приближенный метод решения внутренней смешанной обратной краевой задачи по параметру x. Дадим постановку задачи.

Пусть D_z — жорданова область на плоскости, ограниченная кривой L_z, которая состоит из двух дуг L_z^1 и L_z^2, причем L_z^1 известна, а L_z^2 является искомой. Обозначим через $z^* = x^* + iy^*$ и $z^{**} = x^{**} + iy^{**}$ точки стыка дуг L_z^1 и L_z^2. Смешанная обратная краевая задача по параметру x состоит в определении области D_z и аналитической в ней функции $w = w(z)$, которая конформно отображает D_z на жорданову область D_w по следующим краевым условиям.

1) Граница D_w состоит из двух ляпуновских дуг, пересекающихся под ненулевыми углами, причем при отображении $w = w(z)$ дуге L_z^1 соответствует дуга L_w^1, а L_z^2 — дуга L_w^2.

2) Дуга L_z^2 является графиком непрерывной функции $y = g(x)$, $x^* \le x \le x^{**}$, при этом точкам вида $x + ig(x) \in L_z^2$ соответствуют точки $\varphi(x) + i\psi(x) \in L_w^2$, $x^* \le x \le x^{**}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции (рис. 2).

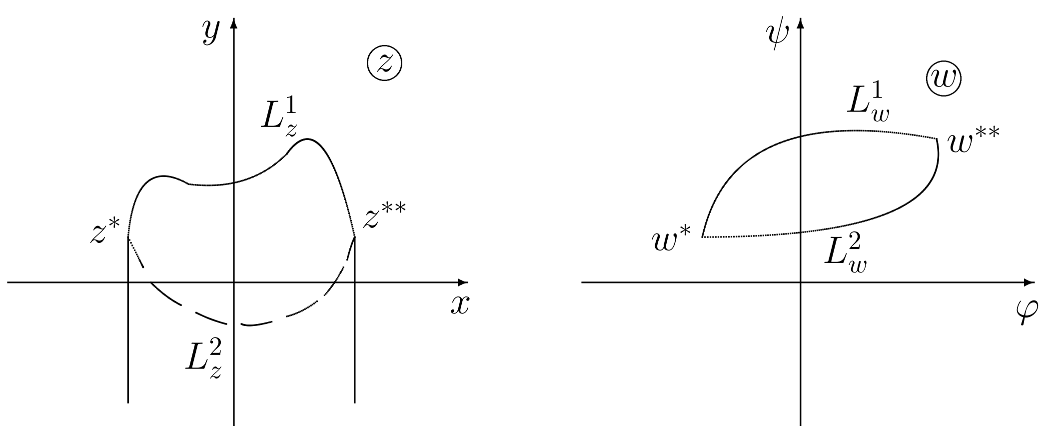

Рис. 2

Впервые эту задачу поставил и исследовал В. Н. Монахов. Основная его идея заключалась в замене кривой L_z^1 близкой ломаной с вершинами в точках z_1, $z_2, \dots, z_n$ ($z_1 = z^{**}$, $z_n = z^*$). Он предложил конформно отобразить область D_w на верхнюю полуплоскость D_ζ функцией $\zeta = \zeta(w)$ и искать функцию $z = z(\zeta)$, обратную к функции $\zeta = \zeta(w(z))$. Поскольку по функции $z = z(\zeta)$ область D_z и функция $w = w(z)$ сразу определяются, то в дальнейшем для удобства будем называть функцию $z = z(\zeta)$ решением задачи.

Интегральное представление для функции $z(\zeta)$ в случае, когда L_z^1 – ломаная, имеет вид:

$$z(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Omega(\xi)\Psi(\xi) d\xi,$$

где

$$\Psi(\xi) = \int\limits_{|\omega| \geq 1} \frac{h(\omega) d\omega}{\Omega(\omega)(\omega - \xi)}, \quad \Omega(\xi) = \prod_{k=1}^{n} (\xi - s_k)^{\alpha_k - 1}.$$

Оно зависит от параметров s_k, причем $s_1 = -1$, $s_n = 1$, s_k, $2 \leq k \leq n-1$, неизвестны, $h(\omega)$ – определяемая из краевых условий функция. Здесь $\alpha_j \pi$, $2 \leq j \leq k-1$, углы ломаной L_z^1 в точках z_j; $\alpha_1 \pi$ — угол между звеном $z_1 z_2$ и лучом L^{**}; $\alpha_n \pi$ — угол между звеном $z_z n - 1 z_n$ и лучом L^{**}.

Отметим, что ситуация здесь похожа на ту, которая имеет место для интегралов Кристоффеля – Шварца: при фиксации параметров $-1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{n-1} < 1$ произвольным образом получается решение задачи, но не для ломаной L_z^1, а для некоторой другой ломаной $\widetilde{L}_z^1$, стороны которой параллельны сторонам L_z^1, а длины сторон, вообще говоря, другие. Назовем параметры s_k, $2 \leq k \leq n-1$, по аналогии с интегралами Кристоффеля-Шварца, акцессорными параметрами.

В данной работе мы предлагаем приближенный метод нахождения акцессорных параметров — так называемый метод движущегося разреза. Наш метод основан на рассмотрении однопараметрических семейств решений задачи по параметру x в случае, когда известная часть границы состоит из двух лучей $L^* = \{x = x^*,\ y \geq y^*\}$, $L^{**} = \{x = x^{**},\ y \geq y^{**}\}$ и удлиняющегося разреза, конец которого пробегает ломаную L_z^1 от точки z_1 до точки z_n. В случае, когда конец разреза располагается на $(k-1)$-м звене, получаем разрез вдоль ломаной с вершинами в точках $z_1 = x^{**} + iy^{**}$, $z_2 \dots, z_{k-1}$ и точке $\widetilde{z}_k$, которая является подвижным концом ломаной (рис. 3).

Интегральное представление решения в этом случае имеет вид

$$z(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{t_1}^{\zeta} \Pi(\xi, \vec{t}) \Phi(\xi, \vec{t}) d\xi,$$

где

$$\Phi(\xi, \vec{t}) = \int\limits_{|\omega| \geq 1} \frac{h(\omega) d\omega}{\Pi(\omega, \vec{t})(\omega - \xi)},$$

$$\Pi(\xi, \vec{t}) = (\xi - t_1)^{\alpha_1 - 1}(\xi - t_k)(\xi - t_{2k-1})^{-\alpha_1}(\xi - t_{2k})^{-1} \prod_{j=2}^{k-1} \left(\frac{\xi - t_j}{\xi - t_{2k-j}} \right)^{\alpha_j - 1},$$

$-1 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{2k} < t_{2k+1} = 1$, вектор $\vec{t} = (t_2, \ldots, t_{2k})$. Точки t_j, $2 \leq j \leq 2k$, назовем акцессорными параметрами. Отметим, что точка t_k соответствует концу разреза, точкам t_j и t_{2k-j} соответствуют простые концы области D_z с носителем в точке z_j, $1 \leq j \leq k-1$, а точке t_{2k} — простой конец с носителем в ∞.

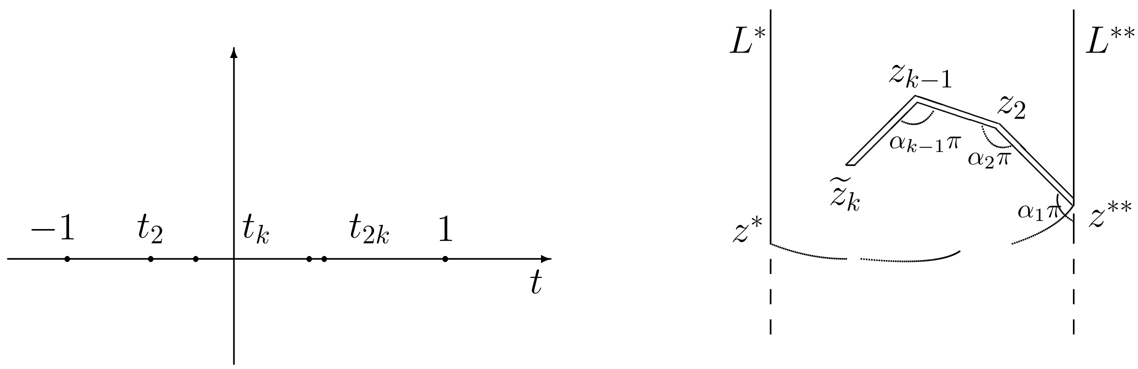

Рис. 3

Теорема 2. *Акцессорные параметры в интегральном представлении для внутренней смешанной обратной краевой задачи по параметру x с полигональной известной частью границы удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\frac{dt_j}{d\tau} = \frac{1 - t_j^2}{(t_j - t_k)\Phi(t_j, \vec{t})}, \quad 2 \leq j \leq 2k, \ j \neq k,$$

$$\frac{dt_k}{d\tau} = \frac{1 - t_k^2}{\Phi(t_k, \vec{t})} \left\{ \frac{\alpha_1}{t_k + 1} - \frac{\alpha_1}{t_k - t_{2k-1}} - \frac{1}{t_k - t_{2k}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{t_k - 1} + \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_j} - \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_{2k-j}} \right) \right\}.$$

В § 2.2 рассмотрен пример определения акцессорных параметров в случае, когда известная часть границы области $D-$ это заданная четырехзвенная ломаная с вершинами в точках $A(1;0)$, $B(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $C(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $D(-1,0)$, $H(\xi) = \operatorname{Re} z = -\frac{1}{\xi}$, $|\xi| \geq 1$.

В главе 3 рассматривается внешняя смешанная обратная краевая задача по параметру x на полигональной римановой поверхности в случае, когда эта поверхность имеет точку ветвления, расположенную над бесконечностью. Построен аналог уравнения Ф.Д. Гахова и доказана его разрешимость для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x. Отметим, что случай простого полюса соответствующей задачи рассматривался в статье[5].

В § 3.1 рассматривается случай с простой точкой ветвления на бесконечности. Дается постановка внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности, содержащей простую точку ветвления, расположенную над бесконечно удаленной точкой:

Пусть D_z — односвязная многолистная область (риманова поверхность) над сферой Римана, содержащая ровно одну точку P, лежащую над ∞ (точка P — простая точка ветвления, других точек ветвления в D_z нет), с границей L_z, которая состоит из известной дуги L_z^1 и искомой дуги L_z^2. В дальнейшем будем считать, что:

1) L_z^1 — полигон с вершинами $z_k = x_k + iy_k,\ k = 1,\ldots,n$, причем положительное направление обхода L_z^1 соответствует движению от z_1 к z_n и $x_1 = a < b = x_n$;

2) L_z^2 такова, что любая прямая, параллельная мнимой оси, пересекает ее не более, чем в одной точке;

3) в своих граничных точках D_z локально однолистна (рис. 4).

Требуется найти L_z^2 и аналитическую в области D_z функцию $\omega(z)$, конформно отображающую D_z на жорданову область D_ω и удовлетворяющую следующим краевым условиям:

а) В плоскости $\omega = \varphi + i\psi$ дуге L_z^2 соответствует дуга L_ω^2 с уравнением $\varphi = f_1(x),\ \psi = f_2(x)$, где $f_1(x) + if_2(x),\ x \in [a,b]$, — граничные значения искомой аналитической функции $\omega(z)$ на L_z^2 и $x = \operatorname{Re} z$. Будем предполагать, что функция $\omega(x)$ непрерывно дифференцируема и $\omega'(x) \neq 0,\ a \leq x \leq b$.

б) Уравнение дуги L_ω^1, дополняющей L_ω^2 до замкнутого контура $L_\omega = \partial D_\omega$,

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0$$

[5]Насыров С. Р., Галиуллина Г. Р. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру // Известия вузов Математика. № 10. – Казань, 2002. – С. 25–30.

считается заданным. Предполагается, что функция $\Phi(\varphi,\psi)$ дважды непрерывно дифференцируема и гладкие дуги L^1_ω и L^2_ω образуют в точках стыка ω_1 и ω_2 ненулевые углы $\pi\gamma_1$ и $\pi\gamma_2$.

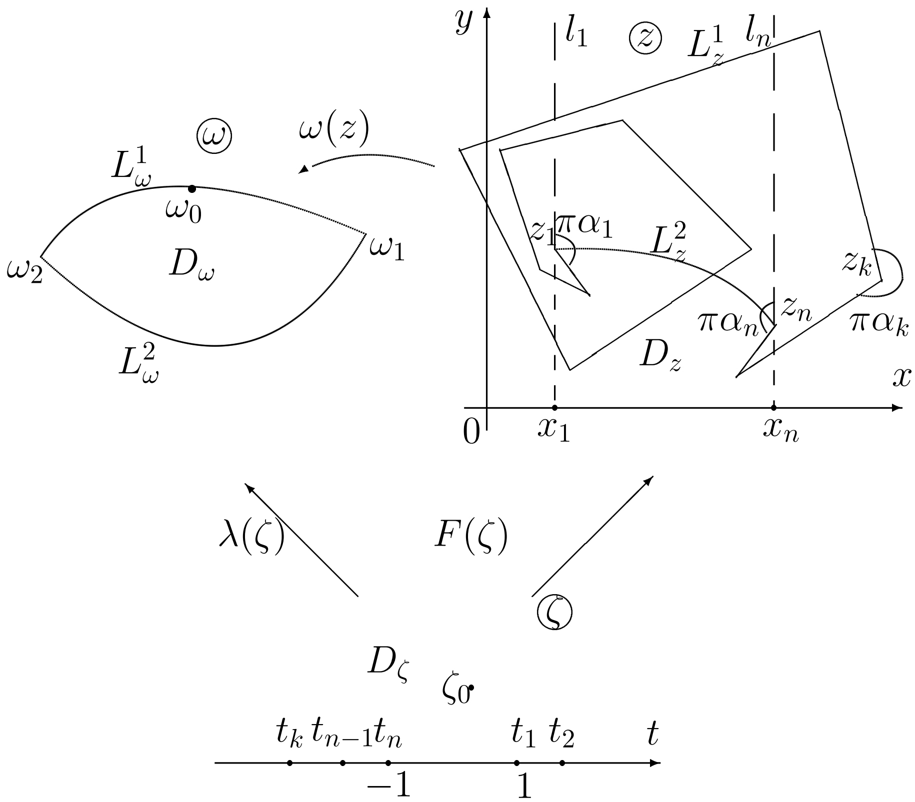

Рис. 4

Для нахождения интегрального представления решения используется метод, предложенный В. Н. Монаховым[6]. Полуплоскость $D_\zeta = \{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ конформно отображается на D_ω функцией $\omega = \lambda(\zeta)$ так, чтобы точки ∞, $t_1 = 1$, $t_n = -1$, лежащие на вещественной оси, переходили соответственно в фиксированные точки $\omega_0 \in L^1_\omega$, ω_1 и ω_2. Пусть t_k — точки на границе D_ζ, соответствующие вершинам ломанной L^1_z, $k = 1,\dots,n$. Через ζ_0 обозначена точка в D_ζ, соответствующая точке ∞ в плоскости z.

Построено интегральное представление решения, которое имеет вид

$$z = F(\zeta) = z_1 + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{\zeta} \frac{\Pi(\omega)d\omega}{(\omega-\zeta_0)^3(\omega-\overline{\zeta}_0)^3}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^6}{\Pi(t)(t-\omega)}dt, \qquad (2)$$

где $\Pi(\zeta) = e^{i\mu}\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1}$, t_k — точки на границе D_ζ, соответствующие вер-

[6]Монахов, В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений / В. Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1977. – 424 с.

шинам ломанной $L_z^1,\ k=1,\dots,n$.

Условием однозначности функции $F(\zeta)$, будет служить равенство $c_{-1}=0$, где c_{-1} — вычет функции $dF(\zeta)/d\zeta$ в точке $\zeta=\zeta_0$.

Показано, что для разрешимости внешней обратной краевой задачи необходимо выполнение условия

$$\left[\frac{12}{(\zeta-\overline{\zeta})^2}-\frac{6}{\zeta-\overline{\zeta}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}\right)^2-\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{(\zeta-t_j)^2}\right]M(\zeta)+$$

$$+\left(2\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}-\frac{6}{\zeta-\overline{\zeta}}\right)N(\zeta)+2Q(\zeta)=0, \tag{3}$$

где $\beta_j=\alpha_j-1,\ j=1,...,n$,

$$M(\zeta)=\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta|^6}{\Pi(t)(t-\zeta)}dt,\ N(\zeta)=\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta|^6}{\Pi(t)(t-\zeta)^2}dt,$$

$$Q(\zeta)=\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta|^6}{\Pi(t)(t-\zeta)^3}dt.$$

Это условие (3) есть аналог уравнения Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности с простой точкой ветвления на бесконечности. Также доказана его разрешимость.

Обозначим

$$S(\zeta)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta-t_j}.$$

Тогда (3) эквивалентно уравнению

$$G(\zeta):=\left[12-6(\zeta-\overline{\zeta})S(\zeta)+(\zeta-\overline{\zeta})^2(S^2(\zeta)+S'(\zeta))\right]M(\zeta)+$$

$$+2\left[(\zeta-\overline{\zeta})^2S(\zeta)-3(\zeta-\overline{\zeta})\right]N(\zeta)+2(\zeta-\overline{\zeta})^2Q(\zeta)=0.$$

Функция $G(\zeta)$ определяет некоторое векторное поле в верхней полуплоскости, которое непрерывно продолжается в замыкание верхней полуплоскости за исключением точек t_j, $1\le j\le n$. Доказано, что это векторное поле обращается в нуль по крайней мере в одной точке ζ верхней полуплоскости.

В § 3.2 рассматривается случай, когда над бесконечностью располагается точка ветвления произвольного порядка ν.

Дается постановка внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x , когда над бесконечностью располагается точка ветвления произвольного порядка ν, аналогичная постановке задачи с единственной точкой ветвления, приведенной в § 3.1.

Получено интегральное представление решения

$$z = F(\zeta) = z_1 + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{\zeta} \frac{\Pi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-\zeta_0)^{\nu+1}(\zeta-\overline{\zeta_0})^{\nu+1}} \int_{-1}^{1} \frac{h(t)|t-\zeta_0|^{2(\nu+1)}}{\Pi(t)(t-\zeta_0)}dt,$$

где ν — порядок точки ветвления, ζ_0 — точка в D_ζ, соответствующая точке ∞ плоскости z.

Показано, что для разрешимости этой задачи необходимо выполнение условия

$$\sum_{m=0}^{\nu} M_m(\zeta_0) \sum_{l=0}^{\nu-m} \frac{(-1)^l C_{\nu+l}^{\nu}}{(\zeta_0-\overline{\zeta_0})^{\nu+l}} \sum_{\sum k_j=\nu-l-m} \prod_{j=1}^{n} \frac{C_{\beta_j}^{k_j}}{(\zeta_0-t_j)^{k_j}} = 0,$$

где $\sum k_j = m_1$, $m_1+m_2+m_3=\nu$,

$$M_m(\zeta_0) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(t)|t-\zeta_0|^{2(\nu+1)}}{\Pi(t)(t-\zeta_0)^{m+1}}dt,\ C_{\beta_j}^{k_j} = \frac{\beta_j(\beta_j-1)\cdots(\beta_j-k_j+1)}{k_j!}.$$

Это условие есть аналог уравнения Гахова на римановой поверхности с точкой ветвления на бесконечности произвольного порядка, разрешимость которого доказана методами теории векторных полей.

Теорема 3. *Уравнение Гахова в D_ζ имеет по крайней мере одно решение.*

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНО В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

[1] Насыров, С. Р. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи на римановой поверхности с точкой ветвления на бесконечности произвольного порядка / С. Р. Насыров, Л. Ю. Низамиева // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.– Самара, 2009. – № 4. – С. 30-43.

Статьи в сборниках научных трудов и тезисов докладов на научно - практических конференциях

[2] Низамиева, Л. Ю. Уравнение Гахова для смешанной обратной краевой задачи по параметру x /Л. Ю. Низамиева // Итоговая научно-образовательная конференция студентов. – КГУ. – Тезисы докладов. – Казань, 2006 – С. 34.

[3] Насыров, С. Р. Смешанные обратные краевые задачи на римановых поверхностях с точками ветвления / С. Р. Насыров, Л. Ю. Низамиева // Уфимская международная математическая конференция, посвященная памяти Леонтьева А. Ф. – Сборник материалов. – Уфа, 2007 – Т. 2. – С. 54-55.

[4] Насыров, С. Р. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи на полигональной римановой поверхности с простой точкой ветвления на бесконечности /С. Р. Насыров, Л. Ю. Низамиева // XIV Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функции и их приложения», посвященная памяти академика П.Л. Ульянова (1928-2006). – Сборник тезисов. – Саратов, 2008 – С. 91

[5] Насыров, С. Р. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на римановой поверхности с точкой ветвления на бесконечности произвольного порядка / С. Р. Насыров, Л. Ю. Низамиева // Материалы IV Петрозаводской конференции по комплексному анализу(29 июня - 5 июля 2008).– Петрозаводск, 2008. – С. 32-33.

[6] Насыров, С. Р. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности с простой точкой ветвления на бесконечности / С. Р. Насыров, Л. Ю. Низамиева // Уч. зап. Казанск. гос. ун-та. – Сер. физ.-мат. – Казань, 2008. – Т. 150. – Кн. 1. – С. 91-101.

[7] Низамиева, Л. Ю. Нахождение акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля - Шварца методом движущегося разреза / Л. Ю. Низамиева // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского/ Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы Девятой международной Казанской летней научной школы - конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». – Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во КГУ, 2009. – Т. 38. – С. 192-194.

[8] Низамиева Л. Ю. О нахождении акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца / Л. Ю. Низамиева // Потребительская кооперация: теория, методология, практика: Материалы международной научно - практической конференции. – М.: Российский университет кооперации, 2010. – С. 313-319.

[9] Низамиева, Л. Ю. Использование краевых задач при нахождении акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца / Л. Ю. Низамиева. –

Казанск. (Приволж.) фед. ун- т. – Казань, 2010. – 42 с. - Библиогр.: 30 назв. – Рус. – Деп. ВИНИТИ 06.07.10, № 421-В2010.

[10] Насыров, С. Р. Приближенный метод решения одной смешанной обратной краевой задачи / С. Р. Насыров, Л. Ю. Низамиева // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – С. 234-235.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

- Разработан приближенный метод и выведена система дифференциальных уравнений для нахождения акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца.

- Разработан приближенный метод и выведена система дифференциальных уравнений для нахождения акцессорных параметров в интегральном представлении для внутренней смешанной обратной краевой задачи по параметру x с полигональной известной частью границы.

- Выведен аналог уравнения Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности, содержащей точку ветвления произвольного порядка, расположенную над бесконечно удаленной точкой, и доказана его разрешимость.

В заключение автор выражает глубокую признательность и благодарность за постановку задач, поддержку, критические замечания и постоянное внимание к работе своему научному руководителю Семену Рафаиловичу Насырову.